

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

7 februarie 2026

Clasa a VI-a

Barem de notare

SUBIECTUL 1 (21 p)

Arătați că numărul $A = \overbrace{125125 \dots 125}^{n \text{ grupe } 500}$ (125 apare de n ori) nu este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural nenul n .

Soluție:

Metoda 1

Dacă $n=1 \Rightarrow A=125$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, 121 și 144, deci nu este pătrat perfect.....(1p)

Presupunem, prin metoda reducerii la absurd, că există un număr natural $n \geq 2$ astfel încât A este pătrat perfect.(1p)

Atunci $4A = \underbrace{500500 \dots 500500}_{n \text{ grupe } 500}$ este pătrat perfect..... (3p)

Ultimele patru cifre ale lui $4A$ sunt 0500, deci $4A$ este divizibil cu 100..... (4p)

Dacă $4A$ este pătrat perfect, atunci există $B \in \mathbb{N}$ astfel încât $4A = 100 \cdot B^2$(4p)

Rezultă că ultimele două cifre ale lui B^2 sunt 05, deci B are ultima cifră 5..... (4p)

Dar pătratele numerelor care au ultima cifră 5 au ultimele două cifre 25.

Contradicție(4p)

Total 21p

Metoda 2

$n = 1 \Rightarrow A = 125 \neq \text{pătrat perfect}$(1p)

$n \geq 2 \Rightarrow A = 125 \cdot \underbrace{1001001001 \dots 1001}_{3n-2 \text{ cifre}}$(7p)

$A = 5^3 \cdot \underbrace{1001001001 \dots 1001}_{3n-2 \text{ cifre}}$ (6p)

$A = 5^2 \cdot 5 \cdot \underbrace{1001001001 \dots 1001}_{3n-2 \text{ cifre}} \neq \text{pătrat perfect}$ deoarece $5 \nmid \underbrace{1001001001 \dots 1001}_{3n-2 \text{ cifre}}$(6p)

$A \neq \text{pătrat perfect}$(1p)

Total 21p

SUBIECTUL 2 (21 p)

a)Rezolvați ecuația $8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + \dots + 8 \cdot 9^{2025} = x^{2026} - 1$.

b)Determinați numărul natural n , pentru care numărul $m = 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$ are exact 120 de divizori naturali.

Soluție:

a) $8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + \dots + 8 \cdot 9^{2025} = (9 - 1) + (9 - 1) \cdot 9 + (9 - 1) \cdot 9^2 + \dots + (9 - 1) \cdot 9^{2025}$(3p)

$= 9 - 1 + 9^2 - 9 + 9^3 - 9^2 + \dots + 9^{2026} - 9^{2025}$(3p)

$= 9^{2026} - 1$(2p)

$x = 9$(1p)

Strada Victoriei nr.132-134

Tg-Jiu, cod 210234

Fax : 0253-224750

<http://isj.gj.edu.ro>, e-mail : isjgorj@yahoo.com,

$$b)m = 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} = 7^n(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 7^n \cdot 400. \dots\dots\dots (3p)$$

$$= 7^n \cdot 2^4 \cdot 5^2. \dots\dots\dots (3p)$$

$$\text{Nr. divizorilor lui } m \text{ este } (n+1)(4+1)(2+1) = 120. \dots\dots\dots (3p)$$

$$\Rightarrow (n+1) \cdot 5 \cdot 3 = 120 \Rightarrow n+1 = 8 \Rightarrow n = 7. \dots\dots\dots (3p)$$

Total 21p

SUBIECTUL 3 (21 p)

Se dau unghiurile adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$, astfel încât $3 \cdot \angle AOB = \angle BOC$ și bisectoarele lor, semidreapta OP , respectiv semidreapta OT formează un unghi cu măsura de 75° . Semidreapta OT' opusă semidreptei OT și semidreapta OC' perpendiculară pe semidreapta OC sunt situate de aceeași parte a dreptei OC . Aflați măsurile unghiurilor $\angle AOC'$ și $\angle T'OC'$.

Soluție:

$$\text{Dacă } \angle POT = 75^\circ \Rightarrow \angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 75^\circ \cdot 2 = 150^\circ \dots\dots\dots (2p)$$

$$\angle AOC' = 360^\circ - (\angle AOC + \angle C'OC) = 360^\circ - (150^\circ + 90^\circ) = 120^\circ \dots\dots\dots (2p)$$

$$3\angle AOB = \angle BOC \Rightarrow 4\angle AOB = 150^\circ \Rightarrow \angle AOB = 37^\circ 30' \dots\dots\dots (3p)$$

$$OP \text{ bisectoarea } \angle AOB \Rightarrow \angle AOP = \angle POB = 18^\circ 45' \dots\dots\dots (3p)$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 112^\circ 30' \dots\dots\dots (3p)$$

$$OT \text{ bisectoarea } \angle BOC \Rightarrow \angle BOT = \angle TOC = 56^\circ 15' \dots\dots\dots (3p)$$

$$OC \perp OC' \Rightarrow \angle COC' = 90^\circ \text{ și } \angle TOT' = 180^\circ \dots\dots\dots (2p)$$

$$\angle T'OC' = 180^\circ - \angle COC' - \angle TOC = 180^\circ - 90^\circ - 56^\circ 15' = 33^\circ 45' \dots\dots\dots (3p)$$

Total 21p

SUBIECTUL 4 (21 p)

Pe cercul de centru O și rază r se consideră punctele A, B, C, D, E , în această ordine, astfel încât $\angle BOC = 2 \cdot \angle AOB$, $\angle COD = 3 \cdot \angle AOB$, $\angle DOE = 2 \cdot \angle BOC$ și $\angle AOE = 90^\circ$. Să se determine măsurile arcelor: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ și $\widehat{DE}$.

Soluție:

Cazul 1.

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle AOE = 360^\circ \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Notăm } \angle AOB = x^\circ \Rightarrow \angle BOC = 2x^\circ, \angle COD = 3x^\circ, \angle DOE = 4x^\circ \dots\dots\dots (2p)$$

$$\angle AOB = 27^\circ, \angle BOC = 54^\circ, \angle COD = 81^\circ, \angle DOE = 108^\circ \dots\dots\dots (2,5p)$$

$$\widehat{AB} = \angle AOB = 27^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\widehat{BC} = \angle BOC = 54^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\widehat{CD} = \angle COD = 81^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\widehat{DE} = \angle DOE = 108^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

Strada Victoriei nr.132-134

Tg-Jiu, cod 210234

Fax : 0253-224750

<http://isj.gj.edu.ro>, e-mail : isjgorj@yahoo.com,

Cazul 2.

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 90^\circ \dots\dots\dots (2p)$$

Notăm $\angle AOB = x^\circ \Rightarrow \angle BOC = 2x^\circ, \angle COD = 3x^\circ, \angle DOE = 4x^\circ \dots\dots\dots (2p)$

$$\angle AOB = 9^\circ, \angle BOC = 18^\circ, \angle COD = 27^\circ, \angle DOE = 36^\circ \dots\dots\dots (2,5p)$$

$$\widehat{AB} = \angle AOB = 9^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\widehat{BC} = \angle BOC = 18^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\widehat{CD} = \angle COD = 27^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\widehat{DE} = \angle DOE = 36^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

Total 21p

